Etude de la Transformée de Hilbert

3 avril 2017

1 Espaces de fonctions holderiennes

Dans tout ce qui suit, α est un nombre réel > 0 et I un intervalle de $\mathbf{R}$, d'intérieur non vide. On désigne par $E_\alpha(I)$, ou simplement E_α lorsque I est précisé, l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbf{C}$ telles qu'il existe $K \geq 0$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

le plus petit de ces nombres K est noté $K_\alpha(f)$. Une fonction f de E_α est appelée hölderienne d'exposant α sur I.

1.1

Donner la dimension de E_α sur $\mathbf{R}$ lorsque $\alpha > 1$. Désormais, on suppose : $0 < \alpha < 1$.

1.2

Dans cette question, l'intervalle I est compact.

a) Montrer que $C^1(I) \subset E_\alpha$.

b) Indiquer une fonction appartenant à E_α mais non à $C^1(I)$.

c) On suppose $0 < \alpha < \beta < 1$. Montrer que E_α contient strictement E_β. strict ...

d) On prend $I = [-\pi, \pi]$; montrer que, si l'on prolonge une fonction $f \in E_\alpha(I)$ vérifiant $f(\pi) = f(-\pi)$ par 2π-périodicité, on obtient une fonction de $E_\alpha(\mathbf{R})$ que l'on note encore f.

2 Transformée de Hilbert des fonctions périodiques

On suppose dans toute cette partie que $I = [-\pi, \pi]$, les fonctions de

$$F_\alpha = \{f \in E_\alpha \mid f(\pi) = f(-\pi)\}$$

étant prolongée sur $\mathbf{R}$ par 2π-périodicité et renotées f.

Pour toute $f \in F_\alpha$ et tout $\varepsilon > 0$ on définit une fonction $T_\varepsilon f$ sur $\mathbf{R}$ par

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{\varepsilon \leq |z-x| \leq \pi} \frac{f(z)}{z-x} dz = \int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+y) - f(x-y)}{y} dy.$$

2.1

a) Montrer que, lorsque ε tend vers 0, $T_\varepsilon f$ converge uniformément vers une fonction Tf que l'on déterminera.

b) Montrer que Tf est continue.

2.2

Lorsque $f \in E_\alpha$ on pose $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + K_\alpha(f)$. Vérifier que $\| \|_\alpha$ est une norme et montrer que T est continue de $(F_\alpha, \|\|_\alpha)$ dans $(C([-\pi, \pi], \mathbf{C}), \| \|_\infty)$. ~~mq~~ 3 petit doute ? $\| \|_\infty$ dans $\| \|_\alpha$

2.3

On suppose f de classe C^k. Montrer que Tf est de classe C^{k-1} et déterminer ses dérivées d'ordre $m \leq k-1$ en fonction de celles de f.

2.4

Soit $f \in F_\alpha$. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} Tf(x)dx$. 0

3 Détermination du noyau de T

Les notations sont celles de la partie 2. On admettra que les fonctions polynômes trigonométriques, c'est-à-dire les combinaisons linéaires complexes de fonctions exponentielles complexes $e_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $t \to e^{int}$, $n \in \mathbf{Z}$ constituent une partie dense de l'espace vectoriel $E = C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ des fonctions 2π-périodique de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$ muni de la norme $\| \|_\infty$ de la convergence uniforme.

On pose pour $f \in E$ et $n \in \mathbf{Z}$:

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

3.1

Soit $f \in E$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(f) = 0$. Montrer que f est nulle. (NB : Parseval est hors-programme).

3.2

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose, ici et dans la suite $\lambda_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. Vérifier que,.pour tout nombre entier $n \geq 2$: $0 < \lambda_n < \lambda_1$.

3.3

On fixe f dans F_α.

a) Calculer $c_n(T(f))$ en fonction de $\lambda_{|n|}$ et $c_n(f)$.

b) Donner le noyau de T.

4 Transformée de Hilbert sur la droite

Les questions sont progressivement moins triviales.

On suppose dans cette partie que $I = \mathbf{R}$, et l'on se donne $h \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle qu'il existe $\gamma \in]0, 1[$ vérifiant $h(t) = O(1/|t|^\gamma)$ à l'infini. On note

$$U = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

4.1

Lorsque $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, on pose :

$$f(z) = \int_{\mathbf{R}} \frac{h(t)}{t - z} dt.$$

a) Montrer que f est correctement définie.

b) Soient $a \in U$, r un nombre réel tel que $0 < r < \mathrm{Im}(a)$, p un nombre réel ≥ 1 ; montrer que la fonction

$$\phi : \overline{D}(a, r) \times \{t \in \mathbf{R} \mid |t| \geq 1\} \to \mathbf{R},\ (z, t) \to \frac{|t|}{|t - z|^p}$$

est bornée.

c) Montrer que f est continue sur U.

d) Soit $a \in U$. Montrer que f possède une dérivée complexe en a, c'est-à-dire que le rapport

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

possède une limite finie $f'(a)$ lorsque z tend vers a dans U, et la déterminer. Vérifier que $a \to f'(a)$ est continue.

e) Soit $a \in U$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de a.
Par symétrie, ces résultats s'étendent à $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

4.2

On suppose désormais $h \in E_\alpha$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\tau \in \mathbf{R}$, on pose

$$H_\varepsilon(\tau) = \int_{|t-\tau|\geq\varepsilon} \frac{h(t)}{t-\tau} dt.$$

a) Montrer que H_ε possède une limite $H(\tau)$ lorsque ε tend vers 0^+. Prouver que la fonction H ainsi obtenue est continue.

4.3 Prolongement de f

Soit k un nombre réel ≥ 1. On note U_k l'ensemble des $z \in U$ tels que : $|\mathrm{Re}(z)| \leq k\ \mathrm{Im}(z)$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Etudier la limite lorsque $z \in U$ tend vers 0 de $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dt}{t-z}$.

b) Soit $\phi \in E_\alpha$, avec $\phi(0) = 0$ et $z \in U_k$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de ϕ telle que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, $|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\phi(t)dt}{t-z}| \leq C\varepsilon^\alpha$.

c) Soit $\varepsilon > 0$ Montrer qu'il existe une constante $C' > 0$ ne dépendant que de h telle que, pour tout nombre $z \in U_k$ on ait

$$|\int_\varepsilon^{+\infty} (\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t})h(t)dt| \leq C'|z|\varepsilon^{-1-\gamma}.$$

d) Soit $\tau \in \mathbf{R}$. Montrer que f possède une limite en τ lorsque z tend vers τ selon $\tau + U_k = \{\tau + z;\ z \in U_k\}$, et la déterminer en fonction de h et H ; on commencera par le cas où $\tau = 0$.

e) Soit τ un nombre réel. Montrer que f possède une limite en τ lorsque z tend vers τ selon $\tau - U_k$, et en déduire que, si f est nulle, h est nulle.

5 Transformée de Hilbert et fonctions holomorphes, hors composition

Cette section ne doit être abordée que lorsque *tout* ce qui précède a été traité.

Dans tout ce qui suit, Ω est un ouvert de $\mathbf{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est dite *holomorphe* lorsque f possède une dérivée complexe $f'(a)$ en tout point de Ω et que $a \to f'(a)$ et continue sur Ω.

On rappelle aussi les deux résultats suivants du cours :

— Une fonction de classe C^1, 2π-périodique est somme normalement convergente de sa série de Fourier ;

— Une fonction développable en série entière en a sur un disque complexe $D(a; R)$ y est analytique.

5.1

Montrer que toute fonction développable en série entière en a sur un disque complexe $D(a, R)$ y est holomorphe.

5.2

On suppose que f est holomorphe sur Ω. Soit $D(a, R)$ un disque contenu dans Ω, et $(r, \theta) \in]0, R[\times\mathbf{R}$.

a) Montrer que les fonctions $r \to f(a + re^{i\theta})$ et $\theta \to f(a + re^{i\theta})$ sont de classe C^1 et déterminer leurs dérivées.

b) Montrer que $c_n : r \to \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta$ est de classe C^1, puis qu'elle vérifie une équation différentielle simple que l'on résoudra.

c) Prouver que f est développable en série entière sur $D(a, R)$.

5.3

Montrer que toute fonction développable en série entière en a sur un disque complexe $D(a, R)$ possède une primitive complexe sur $D(a, R)$ i.e. qu'il existe une fonction holomorphe $F : D(a, R) \to \mathbf{C}$ telle que $F' = f$ sur $D(a, R)$.

Un *triangle* Δ du plan complexe est l'enveloppe convexe d'un triplet ordonné $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$; lorsque f est une fonction continue $\Delta \to \mathbf{C}$ on désigne par $\int_{\delta\Delta} f$ la somme des intégrales $\int_{[a,b]} f$, $\int_{[b,c]} f$, $\int_{[c,a]} f$ où

$$\int_{[a,b]} f = (b - a) \int_0^1 f(a + t(b - a))dt.$$

5.4 Théorème de Morera

Montrer qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est holomorphe ssi, pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$,

$$\int_{\delta\Delta} f = 0.$$

On pourra envisager des fonctions de la forme $z \to \int_{[a,z]} f$.

5.5 Principe de réflexion de Schwarz

On suppose que la fonction continue $g : U \cup \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ prend des valeurs réelles sur l'axe réel, et que g est holomorphe sur U. Montrer que la fonction $\tilde{g}$ définie pour $z \in \mathbf{C}$ par $\tilde{g}(z) = g(z)$ si $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ et $\tilde{g}(z) = \overline{g(\overline{z})}$ si $\mathrm{Im}(z) < 0$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$.

On reprend désormais toutes les notations de la partie 4.

5.6

Montrer que f est continue sur $\overline{U}$. On pourra utiliser l'uniforme continuité de H, et unformisr les estimations de 4.3.

5.7

Dans ce qui suit, h à valeurs réelles, et l'on pose : $g = \frac{1}{2i\pi} f$.

a) On suppose, ici et dans la suite, qu'il existe une fonction $h_1 \in E_\alpha$ telle que, pour $|t| \geq 1$, $h(t) = t^{-\gamma} h_1(t)$. Montrer que

$$f(z) = O(|z|^{-\gamma})$$

lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$. On pourra découper l'intégrale sur les intervalles $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, +\infty]$.

b) On suppose g à valeurs réelles sur l'axe réel. Montrer que $\tilde{g}$ est développable en série entière de rayon infini sur $\mathbf{C}$.

c) En déduire que, si H est nulle, h est nulle.

I – Espaces de fonctions höldériennes.

1.1 Soit $\alpha > 1$; si $f \in E_\alpha$, et $x \in I$ il vient, dès que $h \neq 0$ et $x+h \in I$, $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leq |h|^{\alpha-1}$ qui tend vers 0 si $h \to 0$ donc, $\exists f'(x) = 0$: f est constante. La réciproque est claire, ainsi : $\dim E_\alpha = 1$

1.2 a) Plus généralement, une fonction lipschitzienne appartient à E_α : Soit $\alpha < 1$, et $M = \sup_{(x,y)\in I^2} |x-y|^{1-\alpha}$ (correct, I est borné) il vient :

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x)-f(y)| \leq K|x-y| \leq KM|x-y|^\alpha$$

où K est le rapport de Lipschitz de f.

b) Soit a un point intérieur à I, alors $x \xrightarrow{f} |x-a|$ est lipschitzienne sur I, donc appartient à E_α, mais n'est pas de classe C^1.

c) Soit $f \in E_\beta$ et $M = \sup_{(x,y)\in I^2} |x-y|^{\beta-\alpha}$, il vient :

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x)-f(y)| \leq K_\beta(f)|x-y|^\beta \leq K_\beta(f) M |x-y|^\alpha$$

donc $f \in E_\alpha$.

Soit $a \in \mathring{I}$; et $f : x \to |x-a|^\alpha$, f appartient à E_α

(Cours : $\left||x-a|^\alpha - |y-a|^\alpha\right| \leq \left||x-a|-|y-a|\right|^\alpha \leq |x-y|^\alpha$

car $h \to 1+h^\alpha - (1+h)^\alpha$ est croissante, nulle en 0, donc positive sur $\mathbb{R}^+$. Ne pas confondre avec : $x \to x^\alpha$, $0<\alpha<1$ est concave donc $\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha \geq \frac{1}{2}(x^\alpha+y^\alpha)$)

mais $f \notin E_\beta$: $\frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|^\beta} = |x-a|^{\alpha-\beta}$ n'est pas borné.

d) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, avec par ex. : $x < \pi < y$ il vient :
$-\pi < x < y < 2\pi$

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(\pi)| + |f(\pi)-f(y)|$$
$$\leq |x-\pi|^\alpha + |y-\pi|^\alpha \underset{\text{concavité}}{\leq} 2^{1-\alpha}|x-y|^\alpha$$

Si $|x-y| \geq 1$, on choisit $K \geq \|f\|_\infty$ □

2-1. a) Pour tout $(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ il vient

$$\forall y \neq 0, \left|\frac{f(x+y)-f(x-y)}{|y|}\right| \leq 2^\alpha K_\alpha(f) \cdot |y|^{\alpha-1}$$

donc $y \to \frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}$ est intégrable sur $]0,\pi]$, de plus

$$\left|T_\varepsilon f(x) - \int_{]0,\pi]} \frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\,dy\right| \leq 2^\alpha K_\alpha(f)\int_0^\varepsilon |y|^{\alpha-1}\,dy$$

$$\leq 2^\alpha K_\alpha(f)\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}$$

ce qui assure la convergence uniforme.

b) $(x,y) \to \frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}$ est clairement continue sur $\mathbb{R}\times[\varepsilon,\pi]$ comme $[\varepsilon,\pi]$ est un segment, $T_\varepsilon(f)$ est continue.

Le résultat suit par convergence uniforme.

NB On peut aussi bien user de la convergence dominée ~~car~~ si nous ~~ſ~~ car,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,\pi], \left|\frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\right| \leq \frac{2^\alpha K_\alpha}{y^{1-\alpha}} = \varphi(y)$$

or $\varphi \in L^1(]0,\pi])$.

2.2 Comprendre ! Il s'agit de majorer $\|Tf\|_\infty$ avec $\|f\|_\alpha$, or, avec ce qui précède :

$$|Tf(x)| \leq \int_0^\pi 2^\alpha K_\alpha(f)\cdot\frac{dy}{y^{1-\alpha}} = \frac{2^\alpha \pi^\alpha}{\alpha} K_\alpha(f)$$

et donc : $\|Tf\|_\infty \leq \frac{2^\alpha \pi^\alpha}{\alpha} \times \|f\|_\alpha$.

2.3 Cette fois, il convient d'utiliser le théorème de dérivation :

Fixons $m \leq k-1$, et $y \in]0,\pi]$, il vient :

$$\exists\ \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\right) = \frac{f^{(m)}(x+y)-f^{(m)}(x-y)}{y}$$

Or, selon I, $f^{(m)}$ qui est de classe C^{k-m}, avec $k-m \geq 1$, est un élément de E_α. Notons $M = K_\alpha(f^{(m)})$ (*)

il vient : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,\pi]$, $\left|\frac{f^{(m)}(x+y)-f^{(m)}(x-y)}{y}\right| \leq \frac{M2^\alpha}{y^{1-\alpha}}$

où la fonction du membre de droite est intégrable sur $]0,\pi]$. Comme $(x,y) \to \frac{f^{(m)}(x+y)-f(x-y)}{y}$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0,\pi]$, le théorème de dérivation de

(*) bah ! $M = \|f^{(m+1)}\|_\infty$ convient mieux !

intégrale s'applique : Tf est de classe C^m avec
$$(Tf)^{(m)}(x) = \int_0^\pi \frac{f^{(m)}(x+y) - f^{(m)}(x-y)}{y}\,dy$$
$\square$

2.4 C'est ici que sert la convergence uniforme de 2.1.
Par convergence uniforme sur un segment :
$$\int_{-\pi}^{\pi} Tf = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\pi}^{\pi} T_\varepsilon f \ ; \text{ or, moyennant un}$$
Fubini simple sur un produit de segments :
$$\int_{-\pi}^{\pi} T_\varepsilon f = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\,dy\right)dx$$
$$= \int_\varepsilon^\pi\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\,dx\right)dy = 0$$
par périodicité de f.

3. Détermination du noyau de T.

3.1 Soit P_n une suite de polynômes trigonométriques convergeant vers $\bar{f}$. Comme f est bornée, $P_n f$ converge uniformément vers $f\bar{f}$. Or, par linéarité,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \overline{P_n} = 0$$
l'intégration ayant lieu sur un segment, la convergence uniforme donne : $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 0$, or $|f|$ est continue : $f \equiv 0$.

3.2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$; il vient : $\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}dx\right| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx$ (signe constant)
$> \int_{k}^{(k+2)\pi} \frac{|\sin x|}{x} = \left|\int_{k}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}dx\right|$; notons $v_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx$

la suite v_k est >0, strictement décroissante, et
$$\lambda_n = \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx}_{v_0 \geq v_1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k v_k \text{ . la somme } \sum_{k=1}^{n} (-1)^k v_k$$
est alternée DONC $\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k v_k\right| \leq |v_1|$ $\left\{\begin{array}{l}\text{règle du premier}\\ \text{terme négligé}\end{array}\right.$

finalement $\lambda_n \in \,]0, \lambda_1[$.

- $c_0(f) = 0$ d'après la parité
- Pour $n \geq 1$ par exemple, par convergence uniforme :

$c_n(f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} c_n(T_\varepsilon f)$, or :

$$c_n(T_\varepsilon f) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+y)-f(x-y)}{y} e^{-inx}\, dy\right)dx$$

$$= \int_\varepsilon^\pi \frac{1}{y}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)e^{-inx}dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}\right]dy$$

Fubini simple

$$= \int_\varepsilon^\pi \frac{1}{y}\left[e^{iny}c_n(f) - e^{-iny}c_n(f)\right]dy$$

$$= c_n(f)\int_\varepsilon^\pi \frac{2i\sin ny}{y}\, dy$$

qui tend vers $c_n(Tf) = 2i\, c_n(f)\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$.
$(\varepsilon \to 0^+)$

Si $n < 0$ on trouve $c_n(Tf) = -2i\, c_n(f)\, d_{|n|}$

__Bref__ : $\forall n \in \mathbb{Z}^*$ $c_n(Tf) = 2i\, \mathrm{sgn}(n)\, d_{|n|}\, c_n(f)$

b) Noyau de T.

Soit f telle que $Tf = 0$. Posons $g = f - c_0(f)$

il vient : $Tg = Tf = 0$, $c_0(g) = 0$

De plus : $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(g) = c_n(f)$

et $c_n(Tf) = 0 = \mp 2i\, \mathrm{sgn}(n)\, d_{|n|}\, c_n(f)$

donc $c_n(f) = c_n(g) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}^*$.

Avec 3.1, $g = 0$

$f \equiv c_0(f)$

Ker T est l'espace vectoriel trouvé en 1.1.

Comme ci-dessus, $\int^{+\infty} \left|\frac{h(\tau+u)-h(\tau-u)}{u}\right| du$ converge indépendamment de u.

Pour $u \in]0,1]$, il existe $C > 0$ telle que :

$$\left|\frac{(\tau+u)-h(\tau-u)}{u}\right| \leq \frac{C_0}{u^{1-\alpha}} \quad , \alpha \in]0,1[.$$

Donc $\int_0^{+\infty} \left|\frac{h(\tau+u)-h(\tau-u)}{u}\right| du$ converge et

$$\exists \lim_{\varepsilon \to 0^+} H_\varepsilon(\tau) = \int_0^{+\infty} \frac{h(\tau+u)-h(\tau-u)}{u} du .$$

Pour obtenir la continuité de H, on "uniformise" l'intégrabilité dans la preuve précédente :

Fixons $\tau_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha > |\tau_0|+2$, $C > 0$ tel que, $\forall t$, $|t| \geq 1 \Rightarrow$

$|h(t)| \leq \frac{C}{|t|^\gamma}$. Si $\begin{cases} u \geq \alpha \\ |\tau-\tau_0| \leq 1 \end{cases}$ il vient

$$\frac{|h(\tau \pm u)|}{u} \underset{|\tau \pm u| \geq 1}{\leq} \frac{C}{u|\tau \pm u|^\gamma} \leq \frac{C}{u(u-1)^\gamma} \text{ intégrable}$$

et donc $\left|\frac{h(\tau+u)-h(\tau-u)}{u}\right| \leq \frac{2C}{u(u-1)^\gamma}$ intégrable ;

on sait aussi qu'il existe $D > 0$ telle que :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \ |h(s)-h(t)| \leq D|s-t|^\alpha$$

et donc : $\forall u \in]0,\alpha] \ \forall \tau \in \mathbb{R}$ $\left|\frac{h(\tau+u)-h(\tau-u)}{u}\right| \leq \frac{2^\alpha u^\alpha}{u}$

le membre de droite étant intégrable sur $]0,\alpha]$.

Les hypothèses du théorème de continuité sous $\int$ sont réunies pour $\tau \in [\tau_0-1, \tau_0+1]$ et $t \in \mathbb{R}$ $\square$

4.3. Écrivons $z = x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y > 0$ il vient :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dt}{t-z} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dt}{t-(x+iy)} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{t-x+iy}{(t-x)^2+y^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left((t-x)^2+y^2\right)\Big]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + i \operatorname{Arctg}\left(\frac{t-x}{y}\right)\Big]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$$

$$= I_1 + i I_2 \ ; \quad I_1, I_2 \in \mathbb{R}.$$

$I_1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(\varepsilon-x)^2+y^2}{(\varepsilon+x)^2+y^2}\right)$ tend vers 0 si $(x,y) \to (0,0^+)$.

Pour étudier I_2, nous supposons $|x| < \varepsilon/2$, il vient alors que $I_2 = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\varepsilon-x}{y}\right) - \operatorname{Arctg}\left(\frac{-\varepsilon-x}{y}\right)$ avec

(5)

4.1 a) Fixons $z \in \mathcal{U}$, il vient pour $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{|h(t)|}{|t-z|} = \frac{|h(t)|}{|t|} \cdot \frac{1}{\left|1-\frac{z}{t}\right|} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{|t|^{\gamma+1}}\right)$$

donc la fonction $t \to \frac{h(t)}{t-z}$ est intégrable.

b) ϕ est visiblement continue, donc bornée sur les compacts. Soit $M \geq |a|+r+1$, il vient pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \geq M$ et $z \in \overline{D}(a,r)$: $\frac{|t|}{|t-z|^p} \leq \frac{|t|}{(|t|-|z|)^p} \leq \frac{|t|^{1-p}}{\left(1-\frac{|z|}{|t|}\right)^p} \leq C$

où $C = \frac{1}{\left(1-\frac{a+r}{M}\right)^p}$.

Comme ϕ est bornée sur $\overline{D}(a,r) \times \{t \mid 1 \leq |t| \leq M\}$, elle l'est sur $\overline{D}(a,r) \times \{t \mid |t| \geq 1\}$.

c) On fixe $a \in \mathcal{U}$, r comme ci-dessus, une constante $A > 0$ telle que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| \geq 1 \Rightarrow |h(t)| \leq \frac{1}{|t|^\gamma}$, et l'on pose avec b) : $M = \sup_{(z,t) \in \overline{D}(a,r)} \frac{|t|}{|t-z|}$. Il vient alors :

$$\forall z \in \overline{D}(a,r) \ \forall t \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\quad \frac{|h(t)|}{|t-z|} \leq \frac{AM}{t^{\gamma+1}}$$

Ceci et la continuité des fonctions en jeu montre que $z \xrightarrow{f_1} \int_{|t| \geq 1} \frac{h(t)}{t-z}\,dt$ vérifie les hypothèses du théorème de continuité sous le signe $\int$. Or, $[-1,1]$ étant compact et $(z,t) \to \frac{h(t)}{t-z}$ continue, la fonction $f_0 : z \to \int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{t-z}\,dt$ est continue sur $\mathcal{U}$. Il en résulte que $f = f_0 + f_1$ est continue sur $\mathcal{U}$.

d) Avec les notations précédentes, pour tout $(z,t) \in \overline{D}(a,r) \times \{|t| \geq$

$$\frac{f_1(z) - f_1(a)}{z-a} = \int_{|t| \geq 1} h(t) \frac{1}{(t-z)(t-a)}\,dt \quad \text{avec}$$

$$\frac{|h(t)|}{|(t-z)(t-a)|} \leq \frac{AM}{|t|^{\gamma+1}|t-a|}$$; par convergence dominée appliquée à une suite $(z_n) \in (\overline{D}(a,r) \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \to a$

il vient : $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f_1(z_n)-f_1(a)}{z_n-a} = \displaystyle\int_{|H|\geq 1} \frac{h(t)}{(t-a)^2}\,dt$. (6)

On procède de même avec f_0 et $t\in[-1,1]$ en usant de la continuité de $(t,z)\to \dfrac{h(t)}{(t-z)(t-a)}$ et de la compacité de $[-1,1]$ pour obtenir : $\exists \lim\limits_{\substack{z\to a\\ z\neq a}} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{(t-a)^2}\,dt = f'(a)$.

La continuité de $a \to f(a)$ se traite comme celle de f, usant de $p=2$ dans b).

e) Soit $r>0$ tel que : $0<r<\mathrm{Im}(a)$; lorsque $u\in D(0,r)$ $|u|<r$ et $t\in\mathbb{R}$, on a : $\dfrac{|u|}{|t-a|}<1$ et de ce fait :

$$\frac{1}{t-(a+u)} = \frac{1}{(t-a)\left(1-\frac{u}{t-a}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{(t-a)^{n+1}}.$$

Formellement, pour $u\in D(a,r)$

$$f(a+u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{(t-a)^{n+1}}\right) h(t)\,dt \underset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{(t-a)^{n+1}}\,dt\right) u^n$$

Reste à justifier (valider ?) $(*)$. Dans ce but, introduisons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|h(t)|}{|t-a|^{n+1}}\,dt$, intégrale dont la convergence est assurée vu l'hypothèse sur h à l'infini.

Soit $N\in\mathbb{N}$, il vient pour $|u|<r$:

$$\sum_{n=0}^{N} I_n |u|^n = \int_{\mathbb{R}} \frac{|h(t)|}{|t-a|}\cdot\left(\frac{1-|u|/|t-a|}{1-|u|/|t-a|}\right)dt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|h(t)|}{|t-a|-|u|}\,dt \quad \Big\}\ \text{l'intégrale est visiblement convergente}$$

Donc la série $\sum I_n\cdot|u|^n$ converge, ce qui valide $(*)$ et donc l'analyticité de f.

4.2 a) Fixons $\tau\in\mathbb{R}$, et $\varepsilon\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$. Il vient :

$$\int_{-\infty}^{\tau-\varepsilon} \frac{h(t)}{t-\tau}\,dt \underset{t=\tau+u}{=} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{h(\tau+u)}{u}\,du = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{h(\tau-u)}{u}\,du$$

et donc $H_\varepsilon(\tau) = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{h(\tau+u)-h(\tau-u)}{u}\,du.$

$\varepsilon - x > \varepsilon/2$, $-\varepsilon - x < -\varepsilon/2$, tend vers $\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$

lorsque $(x,y) \to (0, 0^+)$.

Conclusion : $\exists \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \overline{U}}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dt}{t-z} = i\pi$.

b). Pour tout $z \in \overline{U}_k$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|t-z| = \sqrt{(t-x)^2 + y^2} \geq \sqrt{\frac{1}{k^2}((t-x)^2 + x^2)} \geq \frac{1}{k}\sqrt{(t-x)^2 + x^2}$$

$$\geq \frac{1}{k}\max(|t-x|, |x|) \geq \frac{1}{2k}(|t-x| + |x|) \geq \frac{|t|}{2k}.$$

Il en résulte que : $\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\phi(t)}{t-z} dt\right| \leq K \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (2k) \cdot \frac{|t|^\alpha}{|t|} dt \leq \frac{2kK}{\alpha} \varepsilon^\alpha$

$\phi \in E_\alpha$ et $\phi(0) = 0$

c). Soit $A \geq 0$ tel que, $\forall t$, $|t| \geq \varepsilon \Rightarrow |h(t)| \leq \frac{A}{|t|^\gamma}$.

Il vient, pour $z \in \overline{U}_k$,

$$\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t}\right) h(t) dt\right| \leq |z| \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{|h(t)|}{t|t-z|} dt \leq 2k|z| \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{A}{t^{2+\gamma}} dt$$

$$'' \qquad \leq \frac{2kA}{1+\gamma} \cdot \varepsilon^{-1-\gamma}.$$

d) | Ici $\boxed{\tau = 0}$ pour commencer.
| On écrit naturellement, $\varepsilon > 0$ étant fixé pour l'instant

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)dt}{t-z} = \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{h(t)}{t-z} dt}_{I} + \underbrace{\int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{h(t)}{t-z} dt}_{J}.$$

Pour traiter le cas de première intégrale, on écrit :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{h(t)}{t-z} dt = \underbrace{h(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dt}{t-z}}_{\text{tend vers } i\pi h(0) \text{ lorsque } z \to 0,\ z \in \overline{U}} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{h(t) - h(0)}{t-z} dt$$

avec selon b) :

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{h(t) - h(0)}{t-z} dt\right| \leq \frac{2k K_\alpha(h)}{\alpha} \varepsilon^\alpha.$$

Quand à la deuxième :

$$\left|\int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{h(t)}{t-z} dt - H_\varepsilon(0)\right| \leq_{c} \frac{4kA}{1+\gamma} |z| \varepsilon^{-1-\gamma}$$

Soit $\rho > 0$ tel que pour $z \in \overline{U}_k$ avec $|z| < \rho$ on ait ;

i) $\left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dt}{t-z} - i\pi h(0) \right| \leq \varepsilon$

ii) $\frac{4k.A}{1+\gamma} \underbrace{|z|}\varepsilon^{-1-\gamma} \leq \varepsilon$

on est encore libre de faire " $z \to 0$ "

Il vient, pour $z \in \overline{U_h} \cap D(0,\rho)$:

$$|f(z) - i\pi h(0) - H_\varepsilon(0)| \leq \varepsilon + \underbrace{\frac{2h K_\alpha(h)}{\alpha}}_{\text{fixe}} \varepsilon^\alpha + \varepsilon$$

Or : $\lim_{\varepsilon \to 0^+} H_\varepsilon(0) = H(0)$ donc :

$$\exists \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \overline{U_h}}} f(z) = i\pi h(0) + H(0).$$

d) Lorsque l'on remplace 0 par τ, il suffit de changer h en $t \to h(t+\tau)$ pour obtenir

$$\exists \lim_{\substack{z \to \tau \\ z \in \tau + U_h}} f(z) = i\pi h(\tau) + H(\tau).$$

e) Comme : $\lim_{\substack{z \to 0 \\ \operatorname{Im} z < 0}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dt}{t-z} = -i\pi$ il vient.

$$\exists \lim_{\substack{z \to \tau \\ z \in \tau - \overline{U_h}}} f(z) = -i\pi h(\tau) + H(\tau).$$

De là, si f est nulle, $2i\pi h$ aussi, donc h est nulle $\square$